

Rigorese Berechnungsverfahren in der Lasertechnik

Volker Neumann, Laserinstitut Mittelsachsen e.V., Mittweida
 Markus Olbrich, Hochschule Mittweida - University of Applied Sciences, Mittweida

Der Artikel präsentiert den Einsatz des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegrals, mit dessen Hilfe präzise Berechnungen der Ausbreitung elektromagnetischer Strahlung auch unter komplexen optischen Bedingungen möglich sind.

Huygens und später Fresnel haben gezeigt, dass sich die Effekte der Lichtbeugung als Erscheinung einer Überlagerung von Elementarwellen, die von jedem Punkt einer Wellenfront ausgehen, erklären lassen. Der Wellentheorie des Lichtes wurde damit zum Durchbruch verholfen. Auf diese fundamentale Weise lassen sich aber nicht nur Beugungseffekte an Hindernissen, sondern auch die Lichtausbreitung im freien Raum sowie die Strahlformwandlung beim Durchlaufen optischer Grenzflächen erklären und berechnen.

Die Nutzung des Prinzips der Elementarwellenüberlagerung ist heute auf der Basis numerischer Verfahren und der Verfügbarkeit schneller Rechentechnik zur Lösung einer Vielzahl praxisbezogener Optikaufgaben speziell in der Lasertechnik möglich, die mit den herkömmlichen Mitteln nicht oder nur in grober Näherung lösbar sind.

1 Das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral

Kirchhoff versuchte, ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen, das intuitiv entwickelte Verfahren der Überlagerung von Elementarwellen rechnerisch herzuleiten und damit zu bestätigen. Das Ergebnis liegt uns in Form des sogenannten Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegrals vor, das für monochromatische, kohärente elektromagnetische Strahlung und einem homogenen, isotropen Medium zwischen zwei Grenzflächen anwendbar ist:

$$E_1(x_1; y_1; z_1) = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \cdot \iint_{A_0} \frac{E_0(x_0; y_0; z_0)}{r} \cdot e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r} \cdot N(x_0; y_0; z_0) dA_0 \quad (\text{Gl.1})$$

mit dem Ausdruck

$$N(x_0; y_0; z_0) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(\angle(\vec{n}; \vec{r})) - \cos(\angle(\vec{n}; \vec{k})) \right] \quad (\text{Gl.2})$$

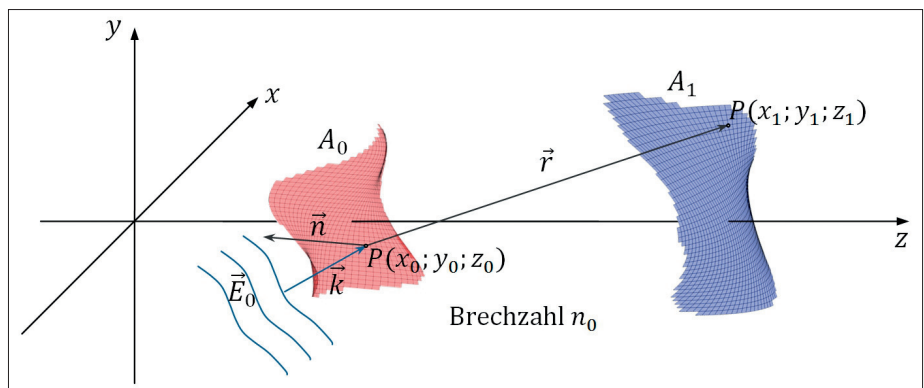


Bild 1: Schematische Darstellung der Abstrahl- und Zielfläche sowie der verwendeten Variablen

als Neigungsfaktor. Zur Veranschaulichung sind die verwendeten Variablen in **Bild 1** dargestellt.

Das Integral ermittelt ausgehend von bekannten Feldstärkewerten auf einer abstrahlenden Fläche (Variablen-Index 0) den gesuchten Wert der elektrischen Feldstärke an einem vorgegebenen Zielpunkt (Variablen-Index 1). Durch Wiederholung des Algorithmus für jeden Punkt auf der Zielfläche ist der gesamte Feldstärkeverlauf auf dieser bestimmbar, wobei jedoch Polarisierungseffekte unberücksichtigt bleiben. Durch den in Gleichung (Gl.1) enthaltenen Neigungsfaktor erweist sich die Abstrahlung der Elementarwellen in der Ebene betrachtet als nierenförmig, während Huygens von einer kugelförmigen Abstrahlung ausgegangen ist (**Bild 2**). Weiterhin existiert

eine wellenlängenabhängige Konstante vor dem Integral, durch welche die Absolutwerte der Feldstärken an den Zielpunkten richtig berechnet werden.

Die integrale Formulierung ist nur für wenige Spezialfälle anwendbar, wodurch eine Diskretisierung und numerische Lösung notwendig ist. Durch Einteilung der Quellfläche in hinreichend kleine Elemente kann die Integration durch eine Addition der komplexen Feldstärkewerte approximiert werden. Durch den Übergang zur Addition gelangt man wieder zu dem Prinzip der Überlagerung von Elementarwellen nach Huygens-Fresnel.

Quell- und Zielfläche können beliebig geformt sein. Insbesondere kann eine Zielfläche längs der Ausbreitungsrichtung eines Laserstrahls gelegt werden, so dass auch Schnittdarstellungen möglich sind (Bild 4a,b,5a).

Die rechnerische Funktion, welche die Werte einer Quellfläche mit denen an einem beliebigen Zielpunkt verknüpft, bezeichnet man auch als Propagationsoperator. Neben dem Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral existieren noch weitere Propagationsoperatoren. Sie erfordern teils weniger Rechenaufwand, sind aber

an Bedingungen und Einschränkungen gebunden, die vor ihrem Einsatz erst abzuklären sind oder zu fehlerhaften Berechnungsergebnissen führen. Das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral unterliegt hingegen nur der Einschränkung, dass es in extremer Nähe zur abstrahlenden Quellfläche ungenaue Ergebnisse liefert. Da der auszuklammernde Berechnungsbereich mit $\Delta z_{\min} < 100 \lambda$ ausgewiesen wird, ist die Einschränkung für die meisten Anwendungsfälle ohne Bedeutung.

2 Aufwandsproblematik und Einheitlichkeit des Verfahrens

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen kann bei komplexen Bedingungen, wie der Entstehung von Beugungseffekten an Hindernissen und wellenoptisch bedingten Auflösungsproblemen, weder auf strahlenoptischer Basis noch mit den bekannten vereinfachten wellenoptischen Gleichungen berechnet werden. Soll das Berechnungsergebnis einschränkungslos und möglichst unter allen gegebenen Umständen richtig sein, so spricht man von der Anwendung rigoroser Berechnungsmethoden. Der Einsatz solcher Verfahren ist trotz heute erreichbarer Unterstützung durch schnelle Computer aus Aufwandsgründen nicht auf beliebige Strahlquellen und optische Systeme anwendbar. Zur Erweiterung der Anwendungsmöglichkeiten ist allein die Bereitstellung höherer Rechnerleistung nicht ausreichend, da sich der Zeitaufwand damit nur indirekt proportional zur Rechengeschwindigkeit verringern lässt. Vielmehr sind prinzipielle Überlegungen zu den aufwandsbestimmenden Faktoren notwendig und aufwandsreduzierende Verfahren zu entwickeln, welche die Genauigkeit und Verlässlichkeit der Berechnung möglichst nicht bzw. nur in vertretbarem Maße beeinträchtigen.

Anders als bei alternativen Verfahren, wie z.B. der Finite-Elemente-Methode, ent-

fällt bei der Nutzung von Operatoren die Berechnung über den gesamten Raumbereich. Es wird lediglich der Zusammenhang zwischen den Feldstärkewerten einer abstrahlenden Fläche und den Werten einzelner Punkte auf einer Zielfläche hergestellt, was den häufigsten Anforderungen bei der Berechnung der Wellenausbreitung genügt. Da nur die Quell- und Zielfläche diskretisiert werden müssen, ist der Rechenaufwand nur noch von ihrer Ausdehnung und nicht von der Entfernung beider abhängig. Von wesentlichen Einfluss auf den Rechenaufwand sind die Elementgröße und damit die Gesamtanzahl von Elementen. Deshalb ist die Wahl der optimalen Anordnung der Elemente und ihrer Größe von großer Bedeutung für die Effizienz des Verfahrens.

Die Berechnung der resultierenden Feldstärkewerte an der jeweiligen Zielfläche erfolgt unabhängig von den gegebenen

Randbedingungen einheitlich mittels des in Kapitel 1 beschriebenen Algorithmus. Je höher die Effizienz dieser elementaren Berechnungsmethode ist, umso weitgehender kann auf eine Kombination mit strahlenoptischen Berechnungsmethoden oder Verfahren, die unter den gegebenen optischen Bedingungen nur Näherungen darstellen, verzichtet werden. Die Richtigkeit der Ergebnisse muss unter dieser Voraussetzung nicht in Frage gestellt werden und konnte bereits in verschiedenen Versuchen bewiesen werden (s. auch [1]). Vor allem erübrigt es sich dann, die komplizierten Probleme der Übergänge an den Verfahrensschnittstellen bei Einsatz hybrider Methoden zu betrachten.

3 Anwendungsbeispiele

Es soll gezeigt werden, dass für eine Vielzahl laseroptischer Aufgaben Berechnungen mit dem Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral erfolgen können. Alle im Folgenden dargestellten Berechnungsergebnisse wurden ohne Zuhilfenahme bekannter strahlenoptischer bzw. wellenoptischen Berechnungsgleichungen ermittelt.

3.1 Beugungseffekte

Für die Berechnung der Beugungerscheinungen werden auf einer Ebene innerhalb des Spaltes oder der Kreisblende in ausreichend geringem Abstand Quellpunkte gesetzt, die in gleicher Phasenlage und mit gleicher Intensität Elementarwellen abstrahlen. Deren Überlagerung ergibt auf der in einer bestimmten Entfernung positi-

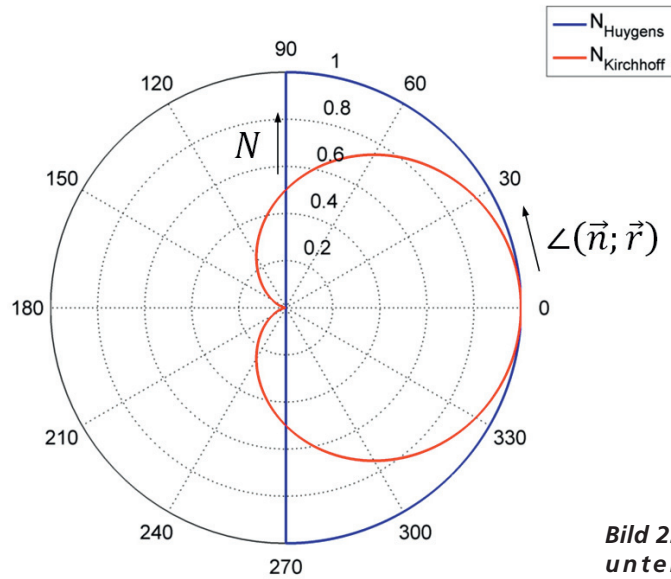


Bild 2: Vergleich der unterschiedlichen Abstrahlcharakteristika der Elementarwellen für $\angle(\vec{n}; \vec{k}) = 180^\circ$

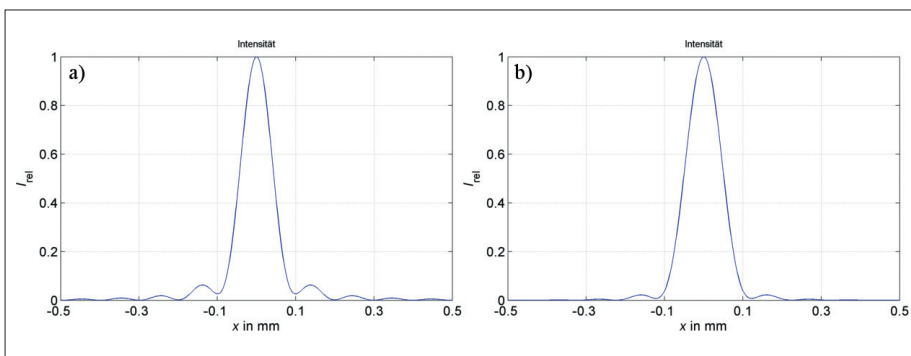


Bild 3: Beugungsbilder bei 10 mm Abstand der Abbildungsebene und einer Wellenlänge $\lambda = 1 \mu\text{m}$; a) hinter Spalt mit Breite $b = 0,1 \text{ mm}$; b) hinter Loch mit Durchmesser $d = 0,1 \text{ mm}$

Bild 4: Darstellung des Feldstärkeverlaufs beim Vorliegen verschiedener Intensitätsverteilungen in der Quellfläche ($z = 0$), Wellenlänge $1 \mu\text{m}$; a) Gaußstrahl $w_0 = 15 \mu\text{m}$; b) Ringblende $r_A = 15 \mu\text{m}$, $r_l = 10 \mu\text{m}$

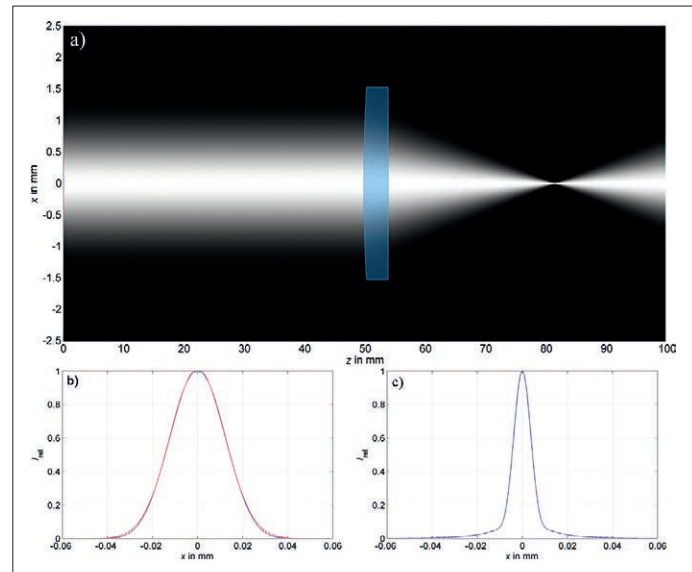
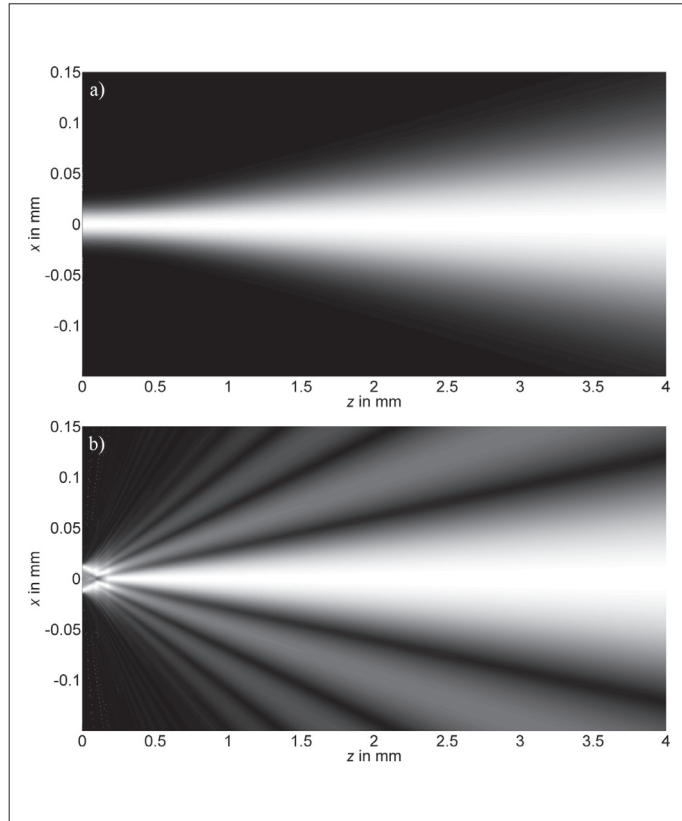


Bild 5: Darstellung des Strahlverlauf und Strahlprofils im Fokus bei Einsatz einer Plankonvexlinse; Wellenlänge: $1 \mu\text{m}$, Linsenparameter: $D = 12 \text{ mm}$, $R = 15 \text{ mm}$, Dicke $d = 5 \text{ mm}$, Brechzahl $n = 1,5$ a) Strahlverlauf in der xz -Ebene; b) Ermitteltes Strahlprofil bei $z = 81 \text{ mm}$ (blau) im Vergleich mit einem idealem Gaußverlauf (rot); Strahlradius auf Quellfläche $w_{0,86} = 1 \text{ mm}$; Berechneter Fokusradius $w_{86} = 22,9 \mu\text{m}$; $w_{\sigma} = 23,1 \mu\text{m}$; c) Ermitteltes Strahlprofil bei $z = 81,67 \text{ mm}$ und einer Vervierfachung des Strahlradius auf der Quellfläche; Berechneter Fokusradius $w_{86} = 50,1 \mu\text{m}$; $w_{\sigma} = 45,1 \mu\text{m}$ Die ermittelten Strahlradien beziehen sich auf 86,5% Leistungseinschluss (w_{86}) und den nach der 2. Momente-Methode errechneten Werten (w_{σ})

orientierten Abbildungsebene die bekannten Beugungsbilder, wobei das Beugungsbild hinter einer Lochblende von dem hinter einem Spalt etwas abweicht (**Bild 3a,b**).

3.2 Freiraumausbreitung

In den folgenden Berechnungsbeispielen wurden die jeweiligen Intensitätsverteilungen auf einer senkrecht zur Strahlachse liegenden Ebene als Quellfläche vorgegeben. Die Phasenlage wurde über die gesamte Quellfläche als konstant angesetzt, was für den Gaußstrahl in der Strahltaile gegeben ist.

Als Resultat erhält man im Falle eines gaußförmigen Intensitätsprofils in der Quellebene eine Strahlentwicklung, wie sie auch als Lösung der Wellengleichung ermittelbar ist (**Bild 4a**). Die Entwicklung des Strahlprofils bei Vorliegen eines Top-Hat, eines Ringprofils oder anderer von idealen Moden abweichender Strahlprofile ist dagegen mit einfachen analytischen Mitteln nicht mehr bestimmbar. Die Berechnung auf der Basis sich überlagernder Elementarwellen liefert auch in diesen Fällen korrekte Ergebnisse (**Bild 4b**).

3.3 Durchlaufen von Grenzflächen

Auf gleicher Weise sind auch die optischen Effekte beim Durchlaufen von Grenzflächen bestimmbar. Entsprechend des verwendeten Prinzips wird jeder berechnete Punkt auf der 1. Grenzfläche als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle betrachtet, welche in einem vorgegebenen Abstand die nächste Grenzfläche erreicht. Damit sind die Effekte der Lichtbrechung und Fokussierung beim Einsatz optischer Linsen berechenbar, ohne dass die bekannten strahlenoptischen Gleichungen wie z.B. das Abbildungsgesetz benötigt werden.

Bild 5a zeigt die so ermittelte fokussierende Wirkung einer plankonvexen Linse, wobei der genaue Leistungsdichteverlauf im und außerhalb des Fokus bestimmt werden kann. Vor allem wenn sowohl sphärische Linsenfehler als auch Beugungseffekte an aperturbegrenzenden Optiken zu beachten sind, ist die Nutzung rigoroser Berechnungsverfahren unumgänglich.

Bild 5b, c zeigen die ermittelten Strahlprofile im Fokus einer sphärischen Plankonvex-Linse für einen Gaußstrahl mit

verschiedenen Durchmessern auf der Quellfläche. Zum Erreichen einer optimalen Fokussierung des Laserstrahles wird oftmals mit einer Strahlaufweitung vor der Laseroptik gearbeitet. Die in **Bild 5b** und **5c** dargestellten Ergebnisse zeigen jedoch, dass unter Umständen mit wachsender Strahlaufweitung auch eine Vergrößerung des Strahlradius im Fokus, hervorgerufen durch eine Verschlechterung des Strahlprofils, auftreten kann. Ursachen sind Beugungseffekte aufgrund der zu geringen Apertur und der wachsende Einfluss von sphärischen Linsenfehlern.

4 Die praktische Nutzbarkeit rigoroser Berechnungsverfahren

Für viele Anwendungsfälle im Bereich der Lasertechnik sind die Bedingungen für eine einheitliche Verwendung der rigorosen Berechnungsmethode auf Basis der Überlagerung von Elementarwellen erfüllt. Lediglich der benötigte Rechenaufwand stellt einen begrenzenden Faktor dar. Um Anwendern, welche die rechnerischen Zusammenhänge weder kennen noch anwenden können, die Nutzung zu ermöglichen, wurde am Laserinstitut der

Hochschule Mittweida ein Programmpaket entwickelt. Dieses umfasst eine grafische Oberfläche zur Parametersteuerung und Ergebnisausgabe. Aktuell stehen verschiedene Standardformen in Bezug auf Strahlprofil und Grenzflächengeometrie zu Verfügung. Weiterhin ist es möglich, reale Messwerte in Form von Intensitätswerten und Phasenlagen sowie beliebige Geometrien in das Programm einzulesen. Die erforderliche Optimierung der Elementgrößen, die ohne entsprechende Erfahrungen nicht möglich ist, kann ebenfalls mit Programmunterstützung erfolgen. Eine automatische Abschätzung der Berechnungsdauer gibt Hinweise darauf, ob die gewünschte rigorose Berechnung mit den gewählten Parametern und vertretbarem Zeitaufwand durchführbar ist.

Literaturhinweise:

[1] M.Olbrich, S.Mauersberger, A.Fischer, B.Steiger, *Numerische Simulation zur Laserstrahlpropagation an realen DOE-Strukturen*, Lasermagazin 1/2013, S. 28-29

Ansprechpartner:

Dipl.-Ing. Volker Neumann
Lasereinstitut
Mittelsachsen e.V.
an der Hochschule
Mittweida
Technikumplatz 17
D-09648 Mittweida
Tel. +49 3727 / 58 1453
Fax +49 3727 / 58 1496
eMail: neumann@hs-mittweida.de
Internet: www.laser.hs-mittweida.de



Markus Olbrich, M. Sc.
Hochschule Mittweida
- University of Applied
Sciences
Fakultät Mathematik/
Naturwissenschaften/
Informatik
Technikumplatz 17
D-09648 Mittweida
Tel. +49 3727 / 58 1274
Fax +49 3727 / 58 1496
eMail: molbrich@hs-mittweida.de
Internet: www.laser.hs-mittweida.de



www.photonik.de

► Webcode 2006