

Zusammenstellung wellenoptischer Berechnungsgleichungen für den realen Laserstrahl

(Mit Hinweisen auf Anwendungsbedingungen, typische Aufgabenstellungen und ISO-Normen)

von

Dipl. - Ing. Volker Neumann

Inhaltsverzeichnis:

Einführung	Seite 3
Die allgemeinen Zusammenhänge zwischen den Strahlgrößen	Seite 5
Verwendeten Strahlkenngrößen und Definition von Strahlparameterprodukt und Strahlgüte	Seite 6
Die rechnerischen Zusammenhänge Strahlgüte k , Strahlparameter w_0 , z_0 , θ (realer Laserstrahl)	Seite 7
Axiale Beschreibung des realen Laserstrahles	Seite 8
- Bestimmung der Strahlfokusparameter bzw. der erforderlichen Strahlaufweitung	
- Bestimmung des Strahldurchmessers an einer beliebigen z -Position der Strahlachse (defokussierter Betrieb)	
Strahltransformation mittels optischer Linsen	Seite 12
Bestimmung der radialen Kenngrößen des Gaußstrahles	Seite 15
Radiale und axiale Beschreibung beliebiger Laserstrahlen	Seite 17
- Einschränkungen für die Anwendbarkeit der angegebenen Gleichungen	
- Hinweise auf die gültigen ISO- Normen	

Einführung

Die bekannten Laserkenngrößen und deren Berechnung beziehen sich in der Literatur meist auf den idealen Gaußstrahl. In der Praxis der Lasertechnik wird aber mit realen Laserstrahlen gearbeitet, deren Strahlgüte k erheblich von dem idealen Wert 1 abweichen kann. Die Folge sind Unsicherheiten bei der Suche nach geeigneten und verlässlichen Berechnungsmethoden. Erschwerend für die Lösung solcher Aufgaben wirkt zusätzlich der Umstand, dass in den angegebenen Gleichungen oft Parameter als bekannt vorausgesetzt werden, die praktisch nicht verfügbar sind. Hier ist eine Umstellung der Gleichungen auf die tatsächlich messbaren bzw. vom Laserhersteller angegebenen Größen erforderlich.

Vom Laserhersteller erhält man in der Regel Angaben zur Strahlgüte, zum Durchmesser des Rohstrahles und seiner Divergenz. Mittels der gängigen Messverfahren wird im Allgemeinen der Intensitätsverlauf im Tailenbereich der Laseroptik ermittelt, um daraus den Fokusbereich $2w_0$ zu bestimmen. Über Blendensysteme erhält man Aussagen zur radialen Strahlausdehnung im Fernfeld des Laserstrahls, woraus dann die Fernfelddivergenz Θ bestimmt werden kann. Auf diese verfügbaren bzw. messbaren Größen sollten sich die verwendeten Gleichungen beziehen.

Da die Durchmesser realer Laserstrahlen nicht mehr über Gaußradien definierbar sind, existieren Normen zur Strahlradiusdefinition auf der Basis der eingeschlossenen Laserleistung bzw. der Bestimmung der so genannten Varianzdurchmesser (auch 2.Momente-Durchmesser)

Die entsprechenden Normen sowie Beschränkungen der Anwendbarkeit werden in Blatt 12 ausgewiesen.

In der folgenden Zusammenstellung wellenoptischer Berechnungsgleichungen wird von allgemeinen, zunächst nicht näher spezifizierten Strahlradien und davon abgeleiteten weiteren Strahlkennwerten ausgegangen. Letztlich müssen aber alle angegebenen bzw. berechneten Strahlkennwerte mit einem Index versehen werden, der die messtechnische bzw. rechnerische Basis der Angaben ausweist und damit eine Vergleichbarkeit gewährleistet.

Die hier zusammengestellten wellenoptischen Zusammenhänge und Berechnungen beziehen sich auf Laserstrahlen mit rotationssymmetrischem Strahlprofil. Bei davon abweichenden Strahlprofilen können die Berechnungen aber getrennt für jede der beiden so genannten Strahlhauptachsen, die senkrecht aufeinander stehen, in gleicher Weise durchgeführt werden.

Dem Übergang vom idealen Gaußstrahl zum realen Laserstrahl kommt der Umstand zu Gute, dass die z-abhängige radiale Ausdehnung eines realen Laserstrahles der Wellenlänge λ in Näherung identisch ist mit der z-abhängigen radialen Ausdehnung des idealen Gaußstrahles einer entsprechend größeren Wellenlänge λ^* . Ein realer Laserstrahl verhält sich diesbezüglich also wie ein idealer Gaußstrahl mit

entsprechend größerer Wellenlänge. Dieser Sachverhalt wird bei der Modifizierung der bekannten Gleichungen für den idealen Gaußstrahl genutzt.

Auf Einschränkungen in der Anwendung dieser Verfahrensweise wird in Blatt 12 hingewiesen

Die Konstanz des Strahlparameterproduktes SPP (bei optischer Strahltransformation) auch für den realen Laserstrahl (mit beliebigem Strahlprofil) wird in der entsprechenden Fachliteratur begründet und nachgewiesen. Die gegebene Invarianz des Strahlparameterproduktes ist Grundlage der gebräuchlichen Strahlgütedefinitionen. Sie gilt aber streng genommen nur für Angaben auf der Basis des so genannten Varianzdurchmessers eines Laserstrahles. Die resultierenden Abweichungen bei Nutzung anderer gängiger Strahlradiusdefinition sind aber in der Regel gering und werden bei dieser Zusammenstellung praxisnaher Gleichungen nicht berücksichtigt.

Soweit dies die radiale Ausdehnung des Laserstrahles betrifft, werden die Gleichungen in der folgenden Zusammenstellung grundsätzlich für den realen Laserstrahl mit einer beliebigen Strahlgüte k angegeben. Die geläufigen Gleichungen und Umrechnungen für den Gaußstrahl ergeben sich daraus als Spezialfall mit $k=1$.

Die allgemeinen Zusammenhänge zwischen den Strahlkenngrößen (Formelblatt 1 und 2)

Typische Probleme und Aufgabenstellungen sind:

- Umrechnung der Strahlgüte k in das Strahlparameterprodukt SPP und umgekehrt, da je nach Laserhersteller beide Angaben benutzt werden.
- Über die gemessenen Größen Fokusradius w_0 und Fernfelddivergenz θ soll die Strahlgüte k bzw. das Strahlparameterprodukt SPP bestimmt bzw. kontrolliert werden.
- Die Fernfelddivergenz nach der Laseroptik wurde vermessen und die Strahlgüte ist vom Hersteller angegeben.
Gefragt ist nach dem Fokusradius und der resultierenden Tailenlänge
- oder umgekehrt: man kennt den Fokusradius sowie die Strahlgüte und möchte wissen, wie schnell sich der Strahl mit wachsender Entfernung zur Strahltaile radial ausdehnt.
Dies erfolgt durch Berechnung der Fernfelddivergenz aus den vorgegeben Größen. Aussagen zur radialen Strahlausdehnung in Fokusnähe sind auf dieser Basis jedoch nicht möglich. Im Tailenbereich des Laserstrahles sind die Gleichungen im Formelblatt 3 anzuwenden.

Die angegebenen Beziehungen zwischen den Strahlkenngrößen werden zudem zur Herleitung der in der Formelsammlung aufgeführten Gleichungen benötigt. Die Zusammenstellung auf den Formelblättern 1 und 2 enthält formalisiert alle möglichen Umrechnungen zwischen den gebräuchlichen Strahlkenngrößen

Verwendete Strahlkenngrößen und Definition von Strahlparameterprodukt und Strahlgüte

λ : Wellenlänge [m]

w_0 : Strahltaillen-Radius [m]

θ : Fernfelddivergenz (Halbwinkel) [rad]

z_0 (neu z_R): $\frac{1}{2}$ Strahltaillenlänge (Rayleigh-Länge) [m]

z : axiale Positionsangabe [m] (Tailenposition: $z = 0$)

r : radiale Positionsangabe [m] (Entfernung zur Strahlachse)

$w(z)$: Strahlradius an einer beliebigen Achsposition z [m]

Strahlparameterprodukt [rad m] (Messwert):

$$SPP = w_0 * \theta$$

Strahlparameterprodukt Gaußstrahl [rad m]:

$$SPP_G = \frac{\lambda}{\pi}$$

Strahlgüte [1]:

$$k = \frac{SPP_G}{SPP} = \frac{\lambda}{SPP * \pi}$$

Beugungsmaßzahl [1]:

$$M^2 = \frac{1}{k}$$

Indexierung:

Je nach Art der zugrunde liegenden Definition des Strahldurchmessers sind die Größen w_0 , w und θ mit Index zu schreiben.

z.B. für Kenngrößen auf der Basis von 86,5% Leistungseinschluss: $w_{0,86}$, w_{86} , θ_{86}

Angaben auf der Basis des Varianzdurchmessers erfolgen mit Index σ : $w_{0\sigma}$, w_σ , θ_σ

Nicht rotationssymmetrische Strahlprofile erhalten zusätzlich den Index x bzw. y

zur getrennten Darstellung der Kenngrößen auf den beiden Strahlhauptachsen (mit der Richtung des Koordinatensystems zur Deckung gebracht) z.B.: $w_{x,86}$, $w_{y,86}$, usw.

Die in der Laserpraxis gebräuchlichsten Angaben für Strahlradien basieren je nach Art der Laserstrahlprofile auf Leistungseinschlüssen von

-86,5% bei Gaußstrahlen und rotationssymmetrischen gaußähnlichen Leistungsdichteverteilungen

-95% bei top-hat ähnlichen Leistungsdichteverteilungen.

Angaben zur Strahlqualität (SPP, k , M^2) erfolgen auf der Basis des Strahl-Varianzdurchmessers.

Rechnerische Zusammenhänge Strahlgüte k , Strahlparameter w_0 , z_0 , θ (realer Laserstrahl)

1. Ermittlung eines unbekanntes Strahlparameters aus einem bekannten Strahlparameter und bekannter Strahlgüte k :

.....
Tailenlänge ($2z_0$):

$$z_0 = \frac{k * \pi * w_0^2}{\lambda} \qquad z_0 = \frac{\lambda}{k * \pi * \theta^2}$$

.....
Tailenradius:

$$w_0 = \frac{\lambda}{k * \pi * \theta} \qquad w_0 = \sqrt{\frac{\lambda * z_0}{k * \pi}}$$

.....
Fernfelddivergenz:

$$\theta = \frac{\lambda}{k * \pi * w_0} \qquad \theta = \sqrt{\frac{\lambda}{k * \pi * z_0}}$$

.....

2. Ermittlung der Strahlgüte k aus zwei bekannten Strahlparametern:

.....
Strahlgüte:

$$k = \frac{\lambda}{\pi * w_0 * \theta} \qquad k = \frac{\lambda}{\pi * z_0 * \theta^2} \qquad k = \frac{\lambda * z_0}{\pi * w_0^2}$$

.....

3. Ermittlung eines unbekanntes Strahlparameters aus zwei bekannten Strahlparametern:

.....
Tailenlänge ($2z_0$):

$$z_0 = \frac{w_0}{\theta}$$

.....
Tailenradius:

$$w_0 = z_0 * \theta$$

.....
Fernfelddivergenz:

$$\theta = \frac{w_0}{z_0}$$

.....

Axiale Beschreibung des realen Laserstrahles (Formelblatt 3)

1. Bestimmung der Strahlfokusparameter bzw. der erforderlichen Strahlaufweitung

Typische Aufgabenstellung:

Gegeben: - Strahlradius eines Parallelstrahles (w_P) am Ausgang einer Laserquelle oder eines Strahlaufweilers

- Strahlparameterprodukt SPP des Lasers bzw. Strahlgüte k

- Laserwellenlänge λ und Fokussierbrennweite f der Laseroptik

Gesucht: - erzielbarer Fokusedurchmesser ($2w_0$)

- Taillenlänge $2z_0$ (von Bedeutung z.B. für Laserschneiden und Laserbohren)

Oder: - Gegeben ist ein gewünschter Fokusedurchmesser, und zu bestimmen ist die notwendige Strahlaufweitung vor der Laseroptik

Rechenweg:

Der Fokusedurchmesser kann über die bekannte Gleichung für das Strahlparameterprodukt berechnet werden

$$SPP = w_0 * \theta$$

oder auch mittels der allgemeinen Gleichung zur Berechnung der radialen Strahlausdehnung (Formelblatt 3, (3)), wobei der Strahldurchmesser an der Stelle $z = 0$ zu ermitteln ist. In beiden Fällen benötigt man die Fernfelddivergenz θ des fokussierten Strahles, die sich aus Linsenbrennweite f und Strahldurchmesser $2w_P$ an der Linse berechnen lässt. Dabei wird vorausgesetzt, dass der eingehende Strahl (z.B. durch ausreichende Aufweitung) in guter Näherung als **Parallelstrahl** betrachtet werden kann. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, muss der erzielbare Fokusedurchmesser über die Strahltransformationsgleichungen (Formelblatt 4) bestimmt werden.

Die Berechnung der Taillenlänge erfolgt über die allg. Beziehung in Formelblatt 2 aus θ .

2. Bestimmung des Strahldurchmessers an einer beliebigen z-Position der Strahlachse (defokussierter Betrieb)

Typische Aufgabenstellung:

Die Strahl- und Optikdaten sind wie oben bekannt, es soll aber z.B. für das Laserhärten eine größere Fläche auf dem Bearbeitungsmaterial durch den Laser bestrahlt werden. Dies wird oftmals durch leichte Defokussierung oder einem Prozess ganz außerhalb der Strahltaile realisiert, und es steht die Frage nach der radialen Ausdehnung des Laserstrahles bei wachsender Entfernung zur Strahltaillenmitte.

Rechenweg:

Die allgemein in der Literatur angegebene und dafür zuständige Gleichung lautet:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_0)^2}$$

Die Gleichung setzt in dieser Schreibweise keinen Gaußstrahl voraus (wie oft irrtümlicherweise angenommen wird) sondern beschreibt einen beliebigen (rotations-symmetrischen) Laserstrahl, der sich entlang der Strahlachse in Hyperbelform ausbreitet.

Da die Tailenlänge ($2z_0$) in der Regel nicht bekannt ist, wird in Formelblatt 3 die Gleichung in folgenden Modifikationen angegeben:

- (2) θ und w_0 gegeben
- (3) θ und Strahlgüte k gegeben
- (4) w_0 und Strahlgüte k gegeben

Die Gleichungen enthalten die Beschreibung des idealen Gaußstrahles als Spezialfall mit $k=1$.

Axiale Beschreibung des realen Laserstrahles:

1. Berechnung der Strahlfokusparameter (bei Fokussierung eines Parallelstrahles):

Fokusradius:

$$w_0 = \frac{\lambda}{\pi * k * \theta} = \frac{SPP}{\theta} \quad \text{mit } \theta = \arctan\left(\frac{w_P}{f}\right) \quad w_P: \text{ Strahlradius an Linse, } f: \text{ Linsenbrennweite}$$

Für kleine Strahldivergenzen gilt $\theta = \frac{w_P}{f}$ und man erhält

$$w_0 = \frac{\lambda * f}{\pi * k * w_P} \quad (\text{Mit } k=1 \text{ ist es die aus der Fachliteratur bekannte Gleichung})$$

$$\text{Zugehörige Tailenlänge: } 2z_0 = 2 * (k * \pi * w_0^2) / \lambda$$

2. Notwendige Strahlaufweitung zum Erreichen eines gewünschten Fokusradius w_0 :

$$w_P = f * \tan\left(\frac{\lambda}{w_0 * \pi * k}\right) \quad \text{bzw.} \quad w_P = f * \frac{\lambda}{w_0 * \pi * k} \quad \text{für kleine Strahldivergenzen}$$

3. Berechnung von Strahlradius und Wellenfrontradius an beliebiger Achsposition z

Der Strahlradius eines Laserstrahles beliebiger Strahlgüte folgt der Beziehung:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_0)^2} \quad (1)$$

Die **Fernfelddivergenz** θ soll nun die Tailenlänge ($2z_0$) ersetzen.

$$\text{Mit } z/z_0 \gg 1 \text{ (Fernfeld) erhält man: } w(z) = \frac{w_0}{z_0} z \quad \text{und mit } \frac{w_0}{z_0} = \tan \theta \quad \text{schließlich } z_0 = \frac{w_0}{\tan \theta}$$

$$\text{damit: } w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(z \frac{\tan \theta}{w_0}\right)^2} \quad \text{mit } \tan \theta \sim \theta \text{ für kleine Divergenzwinkel} \quad (2)$$

Mit **Kenntnis der Strahlgüte** k existiert ein bestimmter Zusammenhang zwischen θ und w_0 , so dass jeweils nur noch eine der beiden Größen angegeben werden muss.

$$w(z) = \frac{\lambda}{k * \pi * \theta} \sqrt{1 + \left(z \frac{k * \pi * \theta^2}{\lambda}\right)^2} \quad (3) \quad \text{oder} \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(z \frac{\lambda}{k * \pi * w_0^2}\right)^2} \quad (4)$$

Zugehöriger Wellenfrontradius (gilt nur für den Spezialfall Gaußstrahl und damit für $k=1$):

$$R(z) = z * \left[1 + \left(\frac{\pi * w_0^2}{z * \lambda} \right)^2 \right]$$

Strahltransformation mittels optischer Linsen (Formelblatt 4)

Typische Aufgabenstellungen:

Im Strahlengang von Lasereinrichtungen sind in der Regel optische Linsen zur Strahlformung eingesetzt, und es ist nach der Wirkung und Auslegung dieser optischen Bauelemente gefragt.

Die Anwendung der entsprechenden Transformationsgleichungen ist speziell auch dann notwendig, wenn der Quell- bzw. Ausgangsstrahl nicht mehr in Näherung als Parallelstrahl betrachtet werden kann und die genaue Lage der Taille des Quellstrahles von Bedeutung ist.

Die verwendeten Gleichungen sind auch ein leicht überprüfbarer Ausdruck der Tatsache, dass optische Linsen, die von ihrer Dimensionierung her den Laserstrahl nicht beschneiden, das Strahlparameterprodukt SPP unverändert lassen. Die angegebenen Gleichungen beschreiben die Transformation der Kenngrößen eines Primärstrahles (Strahl vor der optischen Linse) in jene des Sekundärstrahles (Strahl nach der optischen Linse), wobei auch die jeweilige Tailenposition anzugeben ist bzw. berechnet wird.

Im Vergleich mit dem strahlenoptischen Abbildungsgesetz ergeben sich bei Anwendung dieser wellenoptischen Gleichungen teils erhebliche Unterschiede:

1. Ein Parallelstrahlbündel wird durch eine ideale (fehlerfreie) Linse strahlenoptisch betrachtet immer auf einen Punkt fokussiert (Fokusedurchmesser ist Null)
Dagegen ist der wellenoptisch berechnete Fokusedurchmesser auch bei Einsatz einer idealen optischen Linse stets ungleich Null und niemals kleiner als jener minimale Durchmesser, der mit einem idealen Gaußstrahl (Strahl der Güte $k=1$) erzielt wird.
2. Ein abzubildender Gegenstand in Brennweitenentfernung f zur Linse erscheint strahlenoptisch immer als Abbild im Unendlichen. Dagegen erscheint bei wellenoptischer Berechnung eine primärseitige Strahltaille in Brennweitenentfernung f auf der Sekundärseite wieder in Brennweitenentfernung f .
Bei Annäherung der Taille des Primärstrahles aus dem Unendlichen an die Brennweitenposition der optischen Linse entfernt sich die Taille des Sekundärstrahles nur eine begrenzte Strecke von der Linse - dann findet eine Tailenumkehr statt, die Taille nähert sich wieder der Linse.
3. Abbildungsverhältnis (Sekundärtailenradius / Primärtailenradius) als auch die z -Positionen der Tailen stimmen mit strahlenoptischen Ergebnissen aus dem Abbildungsgesetz nicht mehr überein. Die Differenzen können vor allem bei hohen Strahlgüten erheblich sein und bei Einsatz und Dimensionierung von Laseroptiken nicht vernachlässigt werden.

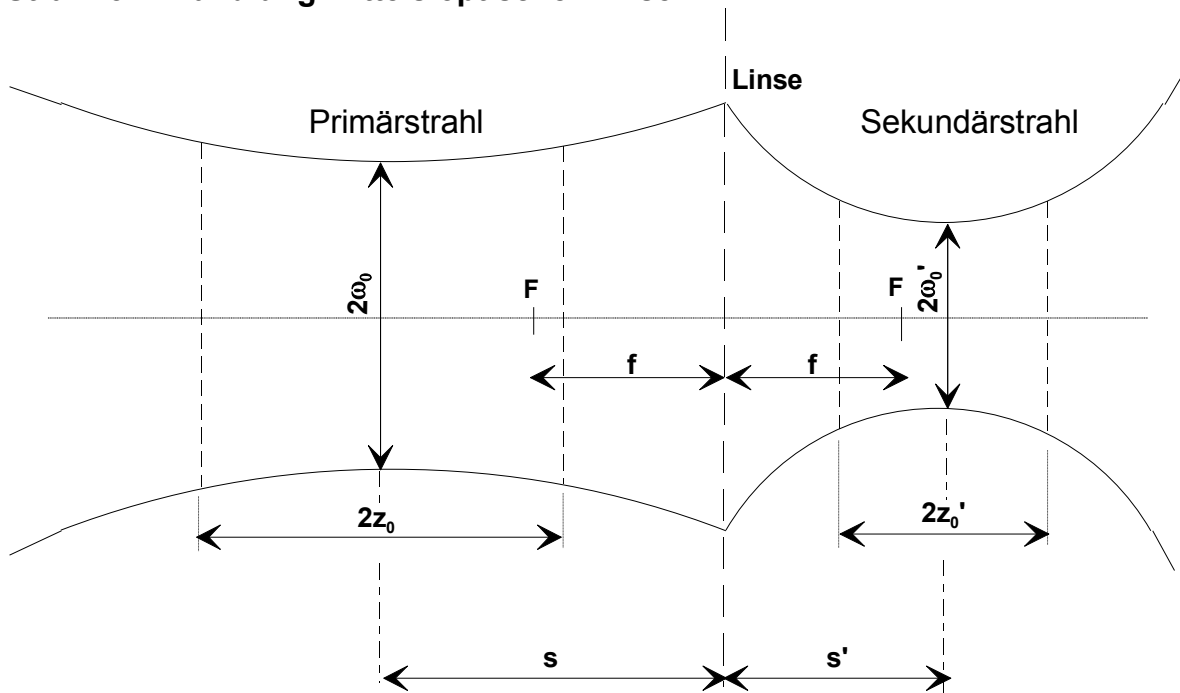
Die praktische Anwendung der wellenoptischen Transformationsgleichungen scheitert teilweise an der unbekanntenen Position der Taille des Primärstrahles. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, dass die genaue Tailenposition bei größeren Rohstrahldurchmessern keinen bedeutenden Einfluss auf Lage und Ausformung des Sekundärstrahles hat. Damit ist es oft ausreichend, die Tailenlage

des Primärstrahles grob abzuschätzen, um eine ausreichend genaue Berechnung zu ermöglichen.

Die wellenoptischen Transformationsgleichungen wurden entsprechend den praktischen Anforderungen für den realen Laserstrahl modifiziert. Mit $k=1$ ergibt sich wieder die geläufige Form für den idealen Gaußstrahl.

Es ist noch darauf hinzuweisen, dass alle im Formelblatt 4 ausgewiesenen Berechnungsgleichungen exakt nur für den Einsatz so genannter „idealer“ also fehlerfrei fokussierender Linsen gilt. Die Auswirkungen z.B. sphärischer Linsenfehler werden in den Gleichungen nicht erfasst. Die Berücksichtigung von Linsen- bzw. Laserobjektivfehlern ist nur mit komplizierteren Berechnungsverfahren bzw. durch Nutzung von numerischen Simulationsverfahren möglich.

Strahlformwandlung mittels optischer Linsen



Berechnung der Parameter des Sekundärstrahles:

Tailenposition:

$$s' = f + \frac{f^2(s-f)}{(s-f)^2 + z_0^2}$$

mit $z_0 = w_0^2 \frac{k * \pi}{\lambda}$

Tailenradius:

$$w_0' = w_0 * f \sqrt{\frac{1}{(s-f)^2 + z_0^2}}$$

Damit sind auch die restlichen Parameter des Sekundärstrahles bestimmbar:
(s. Umrechnungstabelle Formelblatt 2)

Fernfelddivergenz:

$$\theta' = \frac{\lambda}{k * \pi * w_0'}$$

Tailenlänge/2:

$$z_0' = \frac{k * \pi * w_0'^2}{\lambda}$$

Bestimmung der radialen Kenngrößen des Gaußstrahles (Formelblatt 5)

Voraussetzungsgemäß taucht in den folgenden Gleichungen die Strahlgüte k nicht auf. Sie besitzt bei einem idealen Gaußstrahl immer den Wert 1.

Ergibt der radiale Schnitt durch einen Laserstrahl ein ideales Gaußprofil, so ergibt sich auf Grund wellenoptischer Gesetze auch an jeder beliebigen anderen z -Position des Laserstrahles ein Gaußprofil und lediglich der Strahlradius und der Wert der Intensität in Strahlmitte ändern sich.

Bezeichnungen und Definitionen für Radien von Gaußstrahlen:

Die Angabe des Strahldurchmessers erfolgt bei Gaußstrahlen prinzipiell auf der Basis des so genannten Gauß-Radius (r_G), wobei der doppelte Gauß-Radius stets identisch ist mit dem Varianzdurchmesser des Gaußstrahles. Damit gilt das wellenoptische Gesetz der Invarianz des Strahlparameterproduktes für Gaußstrahlen uneingeschränkt.

Laserstrahlradius = Gaußscher Strahlradius

definiert durch **$1/e$ - Abfall der elektr. bzw. magn. Feldstärke**
bzw. **$1/e^2$ - Abfall der Strahlintensität**
und **86,5% Leistungseinschluss - wobei gilt:**
 $w_{86} = w_\sigma$ (1/2 Varianzdurchmesser)

Typische Aufgabenstellungen:

- Berechnung der Größen Gesamtleistung, maximale Leistungsdichte und Gaußradius aus der Vorgabe von jeweils zwei bekannten Werten.
- Der radiale Intensitätsverlauf des idealen Gaußstrahles wird oft als Vergleichsbasis zur Beurteilung realer Laserstrahlprofile genutzt.

Radiale Beschreibung des Gaußschen Laserstrahles

1. Verlauf der elektrischen Feldstärke $E(r)$ [V/m]

$$E(r) = E_0 * e^{-\left(\frac{r}{r_G}\right)^2} \quad (1)$$

mit E_0 : Maximum der elektrischen Feldstärke (bei $r = 0$)
 r : Abstand zur Strahlachse
 r_G : Gaußscher Radius der elektr. Feldstärke (1/e - Abfall)

2. Verlauf der Strahlintensität $I(r)$ [W/cm²]

$$I(r) = I_0 * e^{-2\left(\frac{r}{r_G}\right)^2} \quad (2)$$

mit I_0 : Intensitätsmaximum (bei $r = 0$)
 r und r_G : wie oben (Strahlintensität fällt bei $r = r_G$ auf $1/e^2$!)

3. Eingeschlossene Leistung $P(r)$ [W] (in einen Kreis mit Radius r)

$$P(r) = P_0 * \left(1 - e^{-2\left(\frac{r}{r_G}\right)^2}\right) \quad (3)$$

mit P_0 : Eingeschlossene Gesamtleistung von $r = 0$ bis $r = \infty$
 r und r_G : wie oben (Die eingeschlossene Leistung im Bereich $r = 0$ bis $r = r_G$ beträgt 86,5% der Gesamtleistung P_0)

4. Zusammenhang von Gesamtleistung P_0 und max. Strahlintensität I_0 (bei $r = 0$)

$$I_0 = P_0 \frac{2}{r_G^2 \pi} \quad (4)$$

$$P_0 = I_0 \frac{r_G^2 \pi}{2} \quad (5)$$

5. Gleichung (2) mit Parameter P_0 (statt I_0)

$$I(r) = \frac{2P_0}{r_G^2 \pi} * e^{-2\left(\frac{r}{r_G}\right)^2} \quad (6)$$

Radiale und axiale Beschreibung beliebiger Laserstrahlen

- Einschränkungen für die Anwendbarkeit der angegebenen Gleichungen**
- Hinweise auf die gültigen ISO- Normen**

Ein Laserstrahl mit $k < 1$ besitzt kein ideales Gaußprofil mehr und eine Beschreibung nach Formelblatt 5 ist nur noch in Näherung oder nicht mehr möglich.

Beliebig geformte Laserstrahlen werden durch Erfassen des Intensitätsverlaufes $I(r)$ (rotationssymmetrische Strahlen) bzw. durch Angabe der Intensitätswerte $I(x,y)$ über die senkrecht zur Strahlachse stehenden Schnittfläche innerhalb bestimmter vorzugebender Grenzen beschrieben.

Das erfasste Strahlprofil an einer bestimmten Achsposition z kann dann auf der Basis der ermittelten Leistungsdichteverteilung durch eine Reihe von Strahlkenngrößen charakterisiert werden, die in den entsprechenden ISO-Normen (ISO 11145: 2002, ISO11146-1, 2, 3: 2005 und ISO13694: 2000) aufgeführt sind (Strahlschwerpunkt, Varianzdurchmesser, Elliptizität usw.).

In ISO11146-1, 2, 3 wird u.a. dargestellt, wie mit Kenntnis einer bestimmten Anzahl von Parametern der sogenannten Wignerverteilung ein realer Laserstrahl vollständig beschrieben werden kann und die Berechnung des Strahlprofilwandels entlang der z -Achse bei freier Strahlausbreitung als auch bei Einschaltung optischer Elemente möglich ist.

Die in der Formelsammlung angegebenen Gleichungen für den realen Laserstrahl erlauben dagegen nur näherungsweise eine Berechnung, die sich dann auch lediglich auf den Strahldurchmesser und nicht auf die konkrete Leistungsdichteverteilung orientiert. Die ermittelten Ergebnisse werden um so weniger von einer exakten Berechnung abweichen, je geringer die Differenz zwischen dem verwendeten Strahlradius (z.B. über eine Leistungseinschluss-Definition) und dem sogenannten Varianzdurchmesser (auch 2. Momente-Durchmesser) ist. Dabei sind größere Abweichungen lediglich im Tailenbereich des Laserstrahles zu erwarten. Die in Formelblatt 3 ausgewiesenen Berechnungsgleichungen basieren auf einem hyperbolischen Verlauf der axialen Strahlausbreitung, der streng genommen nur gilt, wenn mit dem Strahlvarianzdurchmesser gerechnet wird.

Die Einsetzbarkeit der vereinfachten Berechnungsmethoden muss also von Fall zu Fall qualitativ abgeschätzt werden. So sind bei allen gaußähnlichen Profilen aber auch bei top-hat ähnlichen (z.B. Super-Gauß-Profil) die Differenzen zwischen dem Strahlradius auf der gängigen 86,5%-Leistungsbasis (w_{86}) gegenüber dem Varianzradius (w_{σ}) gering. Bei Ringmoden und Strahlformen im Fernfeld instabiler Resonatoren sind sie dagegen erheblich.

Einige Geräte zur Strahlprofilvermessung im Tailenbereich ermitteln neben dem 86% - Strahldurchmesser auch automatisch und zusätzlich den Varianzdurchmesser des Laserstrahles. Dieser in die Gleichungen zur Berechnung der radialen Strahl- ausdehnung eingesetzt liefert dann präzise Ergebnisse. Die ausgewiesenen Ab- weichungen zwischen dem 86% Strahldurchmesser und dem Varianzdurchmesser sind dann zugleich Hinweis und Maß für die Abweichung des vermessenen Strahl- profiles vom idealen Gaußprofil mit Strahlgüte $k=1$.

In den meisten Fällen ist aber bei der Laserstrahlberechnung ein Kompromiss zwischen Anwendbarkeit und Exaktheit der Berechnungsmethode notwendig. Die aufwändigen Rechenmethoden über die Wignerverteilung sind in der Praxis der Laseranwendungen kaum nutzbar. Auch der Strahl-Varianzdurchmesser steht oftmals nicht zur Verfügung und seine Ermittlung ist teilweise auch nicht sinnvoll, da er bei bestimmten Strahlprofilen keine anschauliche und praxisnahe Größe darstellt.

Eine zusammenfassende Darstellung der Beschreibung von Laserstrahlen erfolgt in DIN- Taschenbuch 341: „Charakterisierung von Laserstrahlen und Laseroptiken“.